

## تمرين 1

نعتبر  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ:  $f(x) = x|x| - 4x$

1 - أدرس زوجية الدالة  $f$

2 - أ بين أن لكل عنصرين مختلفين  $x$  و  $y$  من  $[0; +\infty[$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x + y - 4$$

ب) حدد رتبة  $f$  على كل من  $[0; 2[$  و  $]2; +\infty[$  واستنتج رتبة  $f$  على كل من  $] -\infty; -2[$  و  $] -2; 0[$

ج) اعط جدول تغيرات الدالة  $f$

3- حدد مطايف الدالة  $f$  إن وجدت

4- حدد تقاطع المنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(D)$  ذا المعادلة  $y = -2x$

$$f(x) = x|x| - 4x$$

1 - ندرس زوجية الدالة  $f$

لدينا  $D_f = \mathbb{R}$

لكل  $x$  من  $\mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -x|-x| + 4x = -(x|x| - 4x) = -f(x)$$

إذن  $f$  دالة فردية

2 - أ بين أن لكل عنصرين مختلفين  $x$  و  $y$  من  $[0; +\infty[$  :  $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x + y - 4$

لدينا لكل  $x$  من  $[0; +\infty[ : f(x) = x^2 - 4x$

ليكن  $x$  و  $y$  من  $[0; +\infty[$  حيث  $x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \frac{x^2 - 4x - y^2 + 4y}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x + y) - 4(x - y)}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x + y - 4)}{x - y} \\ &= x + y - 4 \end{aligned}$$

ب) نحدد رتبة  $f$  على كل من  $[0; 2[$  و  $]2; +\infty[$  ونستنتج رتبة  $f$  على كل من  $] -\infty; -2[$  و  $] -2; 0[$

\* ليكن  $x$  و  $y$  من  $[0; 2[$  حيث  $x \neq y$  ومنه  $0 \leq x < 2$  و  $0 \leq y < 2$

و بالتالي  $0 \leq x + y < 4$  أي  $-4 \leq x + y - 4 < 0$

$$\text{ومنه } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0$$

إذن  $f$  تناقصية قطعاً على  $[0; 2[$  و حيث أن  $f$  فردية فإن  $f$  تناقصية قطعاً على  $] -2; 0[$

\* ليكن  $x$  و  $y$  من  $]2; +\infty[$  حيث  $x \neq y$  ومنه  $x > 2$  و  $y > 2$

$$\text{و بالتالي } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \text{ أي } x + y - 4 > 0$$

إذن  $f$  تزايدية قطعاً على  $]-2; +\infty[$  ومنه  $f$  تزايدية قطعاً على  $]-\infty; -2]$   
 (ج) جدول تغيرات الدالة  $f$

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$f$		↗ 4	↘ -4 ↗	

3- نحدد مطايف الدالة  $f$   
 بما أن  $f$  تزايدية على كل من  $]-2; +\infty[$  و  $]-\infty; -2]$  و تناقصية على  $]-2; 2]$  فإن  $f$  تقبل قيمة قصوى عند  $-2$  هي  $4$  وقيمة دنيا عند  $2$  هي  $-4$

4- نحدد تقاطع المنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(D)$  ذا المعادلة  $y = -2x$   
 تحديد تقاطع المنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(D)$  يرجع إلى حل المعادلة  $x|x| - 4x = -2x$   
 $x|x| - 2x = 0$  تكافئ  $x|x| - 4x = -2x$   
 $x(|x| - 2) = 0$  تكافئ  
 $|x| = 2$  أو  $x = 0$  تكافئ  
 $x = -2$  أو  $x = 2$  أو  $x = 0$  تكافئ

إذن المنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(D)$  يتقاطعان في النقط ذات الأفاصل  $0$  و  $2$  و  $-2$

**تمرين 2**

نعتبر  $f$  دالة عددية معرفة بـ  $f(x) = \frac{-x}{x^2 - 1}$

1- حدد  $D_f$  و بين أن  $f$  دالة فردية  
 2- بين أن لكل عنصرين مختلفين  $a$  و  $b$  من  $D_f$   

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}$$

3- حدد منحنى تغيرات  $f$  على  $]-1; 0]$  و  $]-\infty; -1[$  و استنتج منحنى تغيراتها على  $]-1; 0]$  و  $]-\infty; -1[$   
 4- أعط جدول تغيرات  $f$

**الحل**

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 - 1}$$

1- نحدد  $D_f$

\*- ليكن  $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \text{ يكافئ } x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq -1 \text{ و } x \neq 1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

\*- نبين أن  $f$  دالة فردية

$$\text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R} - \{-1; 1\} : -x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$\text{لتكن } x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$f(-x) = \frac{-(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x)$$

إذن  $f$  دالة فردية

$$-1 \quad \text{نبين أن لكل عنصرين مختلفين } a \text{ و } b \text{ من } D_f \quad \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}$$

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  حيث  $a \neq b$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\frac{-a}{a^2 - 1} - \frac{-b}{b^2 - 1}}{a - b} = \frac{-a(b^2 - 1) + b(a^2 - 1)}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} \times \frac{1}{a - b}$$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{-ab^2 + a + ba^2 - b}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a - b)} = \frac{ab(a - b) + a - b}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a - b)}$$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{(a - b)(ab + 1)}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a - b)} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}$$

-2 نحدد منحنى تغيرات  $f$  على  $[0; 1[$  و  $]1; +\infty[$  و نستنتج منحنى تغيراتها على  $] -\infty; -1[$  و  $] -1; 0[$

$$\text{لدينا لكل عنصرين مختلفين } a \text{ و } b \text{ من } \mathbb{R} - \{-1; 1\} \quad \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}$$

ليكن  $a$  و  $b$  من  $[0; 1[$

ومنه  $0 \leq a < 1$  ;  $0 \leq b < 1$  وبالتالي  $0 \leq a^2 < 1$  et  $0 \leq b^2 < 1$  et  $0 \leq ab < 1$

ومنه  $1 \leq ab + 1 < 2$  et  $-1 \leq a^2 - 1 < 0$  et  $-1 \leq b^2 - 1 < 0$

إذن  $\frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} > 0$  ومنه  $f$  تزايدية على  $[0; 1[$

و حيث أن  $f$  فردية فان  $f$  تزايدية على  $] -1; 0[$

ليكن  $a$  و  $b$  من  $]1; +\infty[$

ومنه  $a > 1$  ;  $b > 1$  وبالتالي  $a^2 > 1$  et  $b^2 > 1$  et  $ab > 1$

ومنه  $ab + 1 > 2$  et  $a^2 - 1 > 0$  et  $b^2 - 1 > 0$

إذن  $\frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} > 0$  ومنه  $f$  تزايدية على  $]1; +\infty[$

و حيث أن  $f$  فردية فان  $f$  تزايدية على  $] -\infty; -1[$

-3 جدول تغيرات  $f$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f$	↗			↗	

**تمرين 1**

حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$  في الحالات التالية

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-1} \quad (b) \quad ; \quad f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3} \quad (a)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}} \quad (d) \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x^2-2x} \quad (c)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x} & x \geq -1 \\ f(x) = \frac{1}{x+1} & x < -1 \end{cases} \quad (e)$$

**تمرين 2**

مثل مبيانيا الدوال  $f$  و  $g$  و  $h$  حيث

$$\begin{cases} h(x) = -2 & x \geq 1 \\ h(x) = -x - 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = |2x+1| \quad ; \quad f(x) = -3x+6$$

**تمرين 3**

أدرس زوجية الدالة  $f$  في الحالات التالية

$$f(x) = \frac{x^3}{|x|-1} \quad (b) \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x^2+3} \quad (a)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad (d) \quad ; \quad f(x) = x^2 - 2x \quad (c)$$

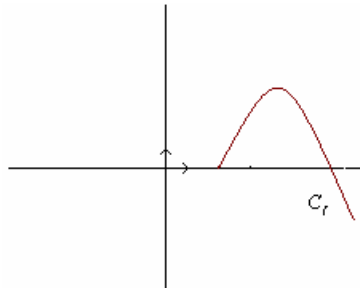
$$f(x) = |x+2| - |x-2| \quad (e)$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x+1 & x \geq 0 \\ f(x) = -2x+1 & x < 0 \end{cases} \quad (g)$$

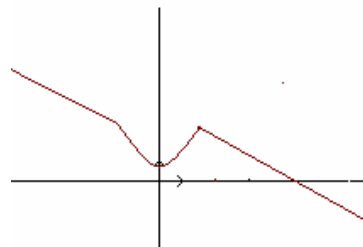
**تمرين 4**

1- أتمم المنحنى  $C_f$  في الحالتين

- أ- دالة زوجية
- ب- دالة فردية



2- دالة عددية منحناها كما يله



هل  $f$  زوجية

**تمرين 5**

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x|}$$

نعتبر  $f$  دالة عددية معرفة بـ

1- حدد  $D_f$  و بين أن  $f$  دالة زوجية

2- أنشئ المنحنى  $C_f$  في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

## تمرين 6

نعتبر  $f$  دالة عددية معرفة بـ  $f(x) = x^2 - 4x + 5$

1- أدرس رتبة  $f$  على كل من  $]2; +\infty[$  ;  $]-\infty; 2]$  و أعط جدول تغيراتها

2- حدد تقاطع  $C_f$  و محور الأفاصيل

3- حدد تقاطع  $C_f$  و المستقيم ذا المعادلة  $y = x + 1$

## تمرين 7

نعتبر  $f$  دالة عددية معرفة بـ  $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

أدرس تغيرات  $f$

## تمرين 8

نعتبر  $f$  دالة عددية معرفة بـ  $f(x) = \frac{-1}{x^2+1}$

1- أدرس زوجية  $f$

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{a+b}{(a^2+1)(b^2+1)}$$

3- حدد منحنى تغيرات  $f$  على  $[0; +\infty[$  و استنتج منحنى تغيراتها على  $]-\infty; 0]$

4- أعط جدول تغيرات  $f$  و حدد قيمة قصوى للدالة  $f$

## تمرين 9

نعتبر  $f$  دالة عددية معرفة بـ  $f(x) = x^3 - 3x$

1- أدرس زوجية  $f$

2- أدرس منحنى تغيرات  $f$  على  $[0; 1[$  و على  $[1; +\infty[$  و أعط جدول تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$

3- استنتج مطاريف الدالة  $f$

## تمرين 10

نعتبر  $f$  دالة عددية معرفة بـ  $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

1- حدد  $D_f$  و أدرس زوجية  $f$

2- أدرس رتبة  $f$  على كل من  $[0; 2[$  و  $[2; +\infty[$  و أعط جدول تغيرات  $f$  على  $D_f$

3- استنتج مطاريف الدالة  $f$  إن وجدت

## تمرين 11

نعتبر  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

1- حدد  $D_f$  ، حل المعادلة  $f(x) = 1$

2- بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}_+^*$   $f(x) \leq 1$  استنتج مطاريف  $f$

## تمرين 12

نعتبر  $f$  دالة عددية معرفة بـ  $f(x) = \frac{-x}{x^2-1}$

1- حدد  $D_f$  و بين أن  $f$  دالة فردية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين  $a$  و  $b$  من  $D_f$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- حدد منحنى تغيرات  $f$  على  $[0;1[$  و  $]1;+\infty[$  و استنتج منحنى تغيراتها على  $] -\infty; -1[$  و  $] -1; 0[$

4- أعط جدول تغيرات  $f$

### تمرين 13

نعتبر  $f$  دالة عددية معرفة بـ  $f(x) = \frac{x^2}{|x|-1}$

1-  $D_f$  و بين أن  $f$  دالة زوجية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(x-1)(y-1)-1}{(x-1)(y-1)}$$

3- حدد رتبة  $f$  على  $[0;1[$  و  $]1;2[$  و  $]2;+\infty[$

4- أعط جدول تغيرات  $f$  على  $D_f$

استنتج مطاريف  $f$  إن وجدت

### تمرين 14

نعتبر  $f$  دالة عددية معرفة بـ  $f(x) = \frac{x^2+2}{x}$

1- بين أن  $f$  فردية

2- أثبت لكل  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}^*$  حيث  $x \neq y$  لدينا

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{xy-2}{xy}$$

3- أ- أدرس رتبة  $f$  على كل من  $]0;\sqrt{2}[$  ;  $[\sqrt{2};+\infty[$

ب- أعط جدول تغيرات على  $\mathbb{R}^*$

د- استنتج مطاريف الدالة  $f$  إن وجدت.

### تمرين 15

لتكن  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x}{x-2} & x < 0 \end{cases}$$

1- أحسب  $f(2)$  ;  $f\left(\frac{-1}{2}\right)$  ;  $f\left(\frac{-3}{2}\right)$

2- أدرس رتبة على كل من  $]0;2[$  و  $]2;+\infty[$  و  $] -\infty; 0[$

3- أ- أعط جدول تغيرات  $f$

ب- استنتج مطاريف  $f$  إن وجدت