

## مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية و مبادئ في الحسابيات

## القدرات المنتظرة

\*- توظيف الزوجية وتفكيك عدد إلى جداء عوامل أولية في حل بعض المسائل البسيطة حول الأعداد الصحيحة الطبيعية.

I ) مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية  
1- مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

## نشاط

من بين الأعداد التالية حدد تلك التي تمثل أعدادا صحيحة طبيعية  
5 ،  $\sqrt{3}$  ،  $4+16$  ،  $\frac{5}{2}$  ،  $12-23$  ،  $\frac{15}{3}$  ،  $\sqrt{25}$  ، 2,15

## تعريف

الأعداد 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ..... تسمى أعدادا صحيحة طبيعية و تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية نمرز لها بـ  $\mathbb{N}$   
نكتب  $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;5..... \rightarrow\}$

## مصطلحات و ترميز

\*- العدد 0 يسمى العدد الصحيح الطبيعي المنعدم  
\*- مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة نمرز لها بالرمز  $\mathbb{N}^*$   
 $\mathbb{N}^* = \{1;2;3;4;5..... \rightarrow\}$

## تمرين

أتمم بأحد الرمز  $\in$  أو  $\notin$   
 $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} \dots \mathbb{N}$  ;  $\sqrt{2} \dots \mathbb{N}^*$  ;  $0 \dots \mathbb{N}^*$  ;  $-5 \dots \mathbb{N}$  ;  $3 \dots \mathbb{N}^*$  ;  $\frac{24}{2} \dots \mathbb{N}$

2- الأعداد الزوجية - الأعداد الفردية  
أنشطة

1- أعط كل الأعداد الزوجية المحصورة بين 41 و 65  
2- لنمرز لمجموعة الأعداد الزوجية بـ P و مجموعة الأعداد الفردية بـ I ،  
أتمم بأحد الرمز  $\in$  أو  $\notin$   
 $2\sqrt{3} \dots P$  ;  $4 \times 17 \dots P$  ;  $4 \times 17 \dots I$  ;  $0 \dots I$  ;  $0 \dots P$  ;  $5 \times 13 \dots I$   
3- ليكن a و b عددين صحيحين زوجيين و c و d عددين صحيحين طبيعيين فرديين  
حدد زوجية الأعداد التالية (هل الأعداد زوجية أم فردية ) مع تعليل الجواب  
 $a+c$  ;  $c+d$  ;  $a+b$

## تعريف

نقول إن العدد الصحيح الطبيعي a عدد زوجي إذا فقط كان يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث  $a = 2k$   
نقول إن العدد الصحيح الطبيعي a عدد فردي إذا فقط كان يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث  $a = 2k + 1$

## أمثلة

الأعداد 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 ..... أعداد زوجية  
الأعداد 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 ..... أعداد فردية

## ملاحظات

\*- كل عدد صحيح طبيعي هو إما عدد زوجي أو عدد فردي  
\*- مجموع عددين زوجيين هو عدد زوجي  
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي  
مجموع عدد زوجي و عدد فردي هو عدد فردي

## تمرين

1- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا  
أدرس زوجية كل من  $n(n+1)$  و  $n+(n+1)+(n+2)$  و  $4n^2 + 4n + 1$   
2- ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث  $m > n$

بين أن  $m+n$  و  $m-n$  لهما نفس الزوجية

**الحل**

- 1 \*  $n$  و  $n+1$  عددان صحيحان طبيعيين متتاليان ومنه أحدهما زوجي و الآخر فردي و التالي جداؤهما زوجي إذن  $n(n+1)$  زوجي  
 \* لدينا  $3(n+1) = (n+1) + (n+2) + (n+1)$  و التالي زوجية  $(n+1) + (n+2) + (n+1)$  هي زوجية  $n+1$   
 إذا كان  $n$  زوجيا فان  $n+(n+1)+(n+2)$  فرديا  
 إذا كان  $n$  فرديا فان  $n+(n+1)+(n+2)$  زوجيا  
 \* لدينا  $4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$  و حيث أن  $(2n^2 + 2n) \in \mathbb{N}$  فان  $4n^2 + 4n + 1$  فردي

-2  $n$  و  $m$  عددان صحيحان طبيعيين حيث  $m > n$

نبين أن  $m+n$  و  $m-n$  لهما نفس الزوجية العدد  $(m-n)$  يمكن أن يكون زوجيا أو فرديا

- \* إذا كان  $(m-n)$  زوجيا فانه يوجد  $k$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $m-n = 2k$  بإضافة  $2n$  لطرفي المتفاوتة نحصل على  $m+n = 2k + 2n = 2(k+n)$  وحيث أن  $k+n \in \mathbb{N}$  فان  $m+n$  زوجي  
 \* إذا كان  $(m-n)$  فرديا فانه يوجد  $k$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $m-n = 2k+1$  بإضافة  $2n$  لطرفي المتفاوتة نحصل على  $m+n = 2k + 2n + 1 = 2(k+n) + 1$  وحيث أن  $k+n \in \mathbb{N}$  فان  $m+n$  فرديا

إذن  $m+n$  و  $m-n$  لهما نفس الزوجية

**(II) - مضاعفات عدد - قواسم عدد**

**(A) مضاعفات عدد**

**1- أنشطة**

**نشاط 1**

1- ضع الرمز  $\times$  في المكان المناسب

2210	211	999	121	33	75	50	24	
								مضاعف 2
								مضاعف 3
								مضاعف 5
								مضاعف 11

2- استخراج من بين أعداد السطر الأول المضاعفات المشتركة للعددين 2 و 3 ثم 3 و 11

**نشاط 2**

- حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6 ثم للعدد 9  
 استنتج المضاعفات المشتركة من بين هذه المضاعفات ماذا تلاحظ  
 ( اصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين 6 و 9 هو 18 . المضاعفات المشتركة للعددين 6 و 9 هي مضاعفات العدد 18 )

**نشاط 2**

- ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا فرديا  
 أ- تأكد  $n^2 - 1$  مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية  $n=1$  ;  $n=3$  ;  $n=5$  ;  $n=7$   
 ب- بين أن  $n^2 - 1$  مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي  $n$

**الحل**

- ب- ليكن  $n$  عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد  $k$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $n = 2k + 1$   
 لدينا  $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$  ومنه  $n^2 - 1 = 4k(k+1)$   
 وحيث أن  $k(k+1)$  عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)  
 فانه يوجد  $k'$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $k(k+1) = 2k'$  و بالتالي  $n^2 - 1 = 8k'$   
 إذن  $n^2 - 1$  مضاعف للعدد 8

## 2- تعريف

ليكن  $a$  و  $b$  عددين صحيحين طبيعيين حيث  $b$  غير منعدم  
نقول إن العدد  $a$  مضاعف للعدد  $b$  إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي  $k$  حيث  $a = bk$

### أمثلة

الأعداد 0 ، 5 ، 10 ، 15 ، 20 ، 25 ، 1775 مضاعفات للعدد 5  
22 ليس مضاعف للعدد 4

3- \* ليكن  $b \in \mathbb{N}^*$

مضاعفات  $b$  هي الأعداد  $kb$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

\*  $0 \times k = 0$

### خاصية

\* لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم ما لنهاية من المضاعفات  
\* للعدد 0 مضاعف وحيد هو 0

## 4- المضاعف المشترك الأصغر

### تعريف

ليكن  $a$  و  $b$  عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين  
المضاعف المشترك الأصغر للعددين  $a$  و  $b$  هو أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين  
 $a$  و  $b$  نرسم له بالرمز  $PPCM(a; b)$

أمثلة  $PPCM(4; 9) = 36$  ،  $PPCM(6; 10) = 30$

## (B) قواسم عدد

### 1- نشاط

حدد قواسم 90 ثم قواسم 126 ثم استنتج أكبر قاسم مشترك للعددين 90 و 126

### 2- تعريف

ليكن  $a$  و  $b$  عددين صحيحين طبيعيين حيث  $b$  غير منعدم  
نقول إن العدد  $b$  قاسم للعدد  $a$  إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي  $k$  حيث  $a = bk$

**ملاحظة :** العدد  $b$  قاسم للعدد  $a$  إذا وفقط إذا العدد  $a$  مضاعف للعدد  $b$   
نقول أيضا العدد  $a$  قابل للقسمة على  $b$

- كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم مخالفا لـ 1 له على الأقل قاسمان 1 و نفسه
- للعدد 1 قاسم وحيد هو نفسه
- جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة تقسم 0

## 3- القاسم المشترك الأكبر لعددين

### تعريف

ليكن  $a$  و  $b$  عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين  
القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  هو أكبر قاسم مشترك لهما  
نرسم له بالرمز  $PGCD(a; b)$

مثال  $PGCD(4; 9) = 1$  ،  $PGCD(126; 90) = 18$

## (III) الأعداد الأولية

### 1- تعريف

نسمي عددا أوليا كل عدد صحيح طبيعي له قاسمان بالضبط

أمثلة (حدد الأعداد الأولية الأصغر من 40)

الأعداد الأولية الأصغر من 40 هي 2 ، 3 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 ، 31 ، 37

## 2- التفكير إلى جداء عوامل أولية لعدد غير أولي

### مبرهنة (مقبولة)

كل عدد صحيح طبيعي  $n$  ( $n \geq 2$ ) هو عدد أولي أو جداء عوامل أولية

### أمثلة

41 عدد أولي

72 عدد غير أولي و  $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$

## تعريف

ليكن  $a$  عددا صحيحا طبيعيا غير أولي كتابة  $a$  على شكل جداء عوامل أولية تسمى "التفكيك إلى جداء عوامل أولية" للعدد  $a$

## أمثلة

فك الأعداد 24 ، 319 ، 1344 إلى جداء عوامل أولية  
 $1344 = 4 \times 4 \times 4 \times 21 = 2^6 \times 3 \times 7$        $319 = 11 \times 29$  و  $24 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3$

## تقنية للتفكيك (نقلها)

مثال:		
1344	2	لتفكيك عدد صحيح طبيعي غير منعدم $a$ نأخذ اصغر عدد أولي يقسم $a$ و ننجز القسمة فنحصل على عدد $b$ خارج القسمة فنأخذ اصغر عدد أولي يقسم $b$ فنحصل على خارج القسمة ..... و نتابع على هذا المنوال حتى نحصل على خارج يساوي 1.
672	2	
336	2	
168	2	
84	2	
42	2	
21	3	
7	7	
1		
إذن $1344 = 2^6 \times 3 \times 7$		

## 3- خاصيات (نقلها)

### خاصية 1

المضاعف المشترك الأصغر لعددتين هو جداء العوامل الأولية المشتركة و الغير المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية. المرفوعة إلى أكبر أس.

### خاصية 1

القاسم المشترك الأكبر لعددتين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية. المرفوعة إلى أصغر أس.

**ملاحظات**  $PPCM(a;a) = a$  ،  $PPCM(a;1) = a$  ،  $PGCD(a;a) = a$  ،  $PGCD(a;1) = 1$

## تمرين:

حدد  $PPCM(35;121)$  ،  $PGCD(35;121)$  ،  $PPCM(84;216)$  ،  $PGCD(84;216)$

## إضافات

\* **طريقة لتحديد المضاعف المشترك الأصغر** للعددتين  $a$  و  $b$  حيث  $a \geq b$  أحد مضاعفات  $a$  ثم أتأكد بالتتابع ابتداء من أصغر مضاعف غير منعدم للعدد  $a$  هل هو مضاعف للعدد  $b$  فإذا كان الجواب لا ، أتابع البحث إن كان نعم ، أتوقف و العدد الذي حصلت فيه على هذا الجواب هو المضاعف المشترك الأصغر للعددتين  $a$  و  $b$ .

\* **طريقة لتحديد القاسم المشترك الأكبر** للعددتين  $a$  و  $b$  حيث  $a \geq b$  أحد قواسم العدد  $b$  ثم أتأكد بالتتابع تناقصيا ابتداء من أكبر قاسم للعدد  $b$  هل هو قاسم للعدد  $a$  فإذا كان الجواب لا ، أتابع البحث ان كان نعم ، أتوقف و العدد الذي حصلت فيه على هذا الجواب هو القاسم المشترك الأكبر للعددتين  $a$  و  $b$ .

\* **طريقة لتحديد** ما إذا كان العدد  $a$  أوليا أم لا نحدد أولا جميع الأعداد الأولية  $p$  حيث  $p^2 \leq a$ .  
إذا كان  $a$  يقبل القسمة على أحد هذه الأعداد فان  $a$  غير أولي  
إذا كان  $a$  لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد فان  $a$  أولي