

## المعادلات و المتراجحات من الدرجة الاولى والثانية بمجهول واحد

### القدرات المنتظرة

- \*- حل معادلات أو متراجحات تؤول في حلها إلى معادلات أو متراجحات من الدرجة 1 أو 2 بمجهول واحد.
- \*- تربيض وضعيات تتضمن مقادير متغيرة باستعمال تعابير أو معادلات أو متراجحات.

### I تعاريف

#### أنشطة

$$x \in \mathbb{N} \quad 2x+4=5x-\frac{1}{2} \quad K \quad x \in \mathbb{R} \quad 2x+4=5x-\frac{1}{2} \quad \text{حل المعادلتين التاليتين}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad 5x-7 \leq \frac{11}{2}x+4 \quad \text{حل المتراجحة}$$

#### تعريف 1

جميع حلول معادلة (أو متراجحة) تكون مجموعة تسمى مجموعة حلول المعادلة (أو المتراجحة) نرمر لها بـ  $S$  أو  $S'$  أو.....

#### تعريف 2

نقول ان معادلتين (أو متراجحين) متكافئتان إذا كانت للمعادلتين (أو للمتراجحتين) نفس مجموعة الحلول.

### II المعادلة التالفة

#### 1- مفهوم معادلة تالفة

##### تعريف

كل معادلة يمكن كتابتها على شكل  $ax+b=0$   $x \in \mathbb{R}$  تسمى معادلة تالفة. و تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان  $a \neq 0$

#### 2- حل معادلة تالفة

$$x \in \mathbb{R} \quad ax+b=0 \quad \text{نحل المعادلة}$$

$$\text{إذا كان } a=b=0 \text{ فان } S=\mathbb{R}$$

$$\text{إذا كان } a=0 \text{ و } b \neq 0 \text{ فان } S=\emptyset$$

$$\text{إذا كان } a \neq 0 \text{ فان } ax+b=0 \text{ تكافئ } x=-\frac{b}{a} \text{ أي أن } S=\left\{\frac{-b}{a}\right\}$$

#### 3- حل المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$ $x \in \mathbb{R}$ حيث $a \neq 0$ و $c \neq 0$

$$(ax+b)(cx+d)=0 \text{ تكافئ } ax+b=0 \text{ أو } cx+d=0$$

إذن مجموعة حلول المعادلة  $(ax+b)(cx+d)=0$   $x \in \mathbb{R}$  هي اتحاد مجموعة حلول المعادلة

$$x \in \mathbb{R} \quad ax+b=0 \text{ و } x \in \mathbb{R} \quad cx+d=0$$

$$\text{تمرين: حل المعادلة } (2x+1)(-3x-5)=0 \quad x \in \mathbb{R}$$

### III المتراجحات التالفة بمجهول واحد

#### 1- تعريف

كل متراجحة يمكن كتابتها على شكل  $ax+b < 0$  أو  $ax+b \leq 0$   $x \in \mathbb{R}$  أو

$ax+b \geq 0$  أو  $ax+b > 0$   $x \in \mathbb{R}$  حيث  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ، تسمى متراجحة تالفة.

و تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان  $a \neq 0$

#### 2- حل متراجحة تالفة بمجهول واحد

##### أ- إشارة الحدانية $ax+b$

\*- إذا كان  $a=0$  فان إشارة  $ax+b$  هي إشارة  $b$

\*- إذا كان  $a \neq 0$  فإن  $ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$  وبالتالي إشارة  $ax + b$  مرتبطة بإشارة  $a$  و  $x + \frac{b}{a}$

$$x + \frac{b}{a} > 0 \quad \text{تكافئ} \quad x > -\frac{b}{a}$$

$$x + \frac{b}{a} < 0 \quad \text{تكافئ} \quad x < -\frac{b}{a}$$

نلخص هذه الدراسة في جدول يسمى جدول إشارة  $ax + b$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	عكس إشارة $a$	0	إشارة $a$

### تمرين

حل المتراجحتين:  $x \in \mathbb{R} \quad 2x + 3 < 0$  ;  $x \in \mathbb{R} \quad -3x + 4 \leq 0$  بطريقتين مختلفتين.

**3- حل المتراجحة**  $x \in \mathbb{R} \quad (ax + b)(cx + d) \leq 0$  أو من نوع  $x \in \mathbb{R} \quad (ax + b)(cx + d) > 0$

حل هذا النوع من المتراجحات يعتمد على دراسة إشارة  $(ax + b)(cx + d)$  بتوظيف إشارة كل من  $(ax + b)$  و  $(cx + d)$

### تمرين

حل المتراجحتين:  $x \in \mathbb{R} \quad (2x + 1)(-3x + 1) < 0$  ;  $x \in \mathbb{R} \quad (-2x - 1)(-5x + 1) \geq 0$

## IV) المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

### 1- تعريف

نسمي معادلة من الدرجة الثانية في  $\mathbb{R}$  كل معادلة على الشكل  $ax^2 + bx + c = 0$  حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية و  $a$  غير منعدم.

### 2- أمثلة

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات

$$3x^2 - \sqrt{3}x = 0 \quad , \quad x^2 - 5 = 0 \quad , \quad 2x^2 + 1 = 0 \quad , \quad x^2 - 6x - 7 = 0 \quad , \quad x^2 - 2x + 3 = 0$$

### 3- صفة عامة

( $a$ ) نعتبر المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  حيث  $x \in \mathbb{R}$  و  $a \neq 0$

لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

$$\text{لدينا} \quad ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

$$\text{الكتابة} \quad a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \quad \text{يسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود} \quad ax^2 + bx + c$$

لنحل المعادلة

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \text{تكافئ} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

من خلال هذا يتبين أن حل المعادلة يتوقف على إشارة العدد  $b^2 - 4ac$  الذي يسمى **مميز**

$$\text{المعادلة} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{نرمز له بـ} \quad \Delta \quad \text{نكتب} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

\* إذا كان  $\Delta < 0$  فإن  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$  وبالتالي المعادلة لا تقبل حلا في  $\mathbb{R}$

\* إذا كان  $\Delta = 0$  فإن  $x + \frac{b}{2a} = 0$  أي  $x = -\frac{b}{2a}$

\* إذا كان  $\Delta > 0$  فإن  $ax^2 + bx + c = 0$  تكافئ  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

$$\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \text{ تكافئ}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ أو } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ تكافئ}$$

### مبرهنة

نعتبر المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  حيث  $a \neq 0$  و  $S$  مجموعة حلولها في  $\mathbb{R}$ .  
العدد  $b^2 - 4ac$  يسمى مميز المعادلة أو ثلاثية الحدود  $ax^2 + bx + c$  نرسم له  $\Delta$   
إذا كان  $\Delta < 0$  فإن  $S = \emptyset$   
إذا كان  $\Delta = 0$  فإن  $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$   
إذا كان  $\Delta > 0$  فإن  $S = \left\{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

### اصطلاح

إذا كان  $\Delta = 0$  فإن  $x = -\frac{b}{2a}$  في هذه الحالة نقول إن  $-\frac{b}{2a}$  حل مزدوج للمعادلة

**ملاحظة** إذا كان  $a$  و  $c$  لهما إشارتين مختلفتين فإن للمعادلة حلين.

### تمرين

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات

$$x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad 5x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0 \quad 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

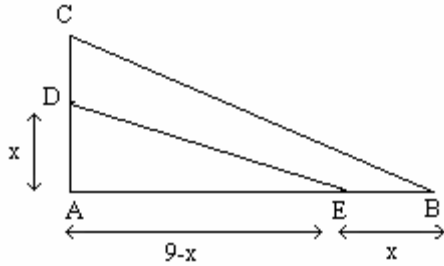
### تمرين

نعتبر  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  حيث  $AB = 9$  و  $AC = 4$  حدد موضع نقطتين  $D$  و  $E$

تتبعان

على التوالي لـ  $[AB]$  و  $[AC]$  بحيث  $AD = BE$  و مساحة  $ADE$  تساوي مساحة الرباعي  $BCDE$

اختيار المجهول نضع  $AD = BE = x$



مساحة  $ADE$  هي  $\frac{x(9-x)}{2}$

مساحة الرباعي  $BCDE$  هي  $\frac{4 \times 9}{2} - \frac{x(9-x)}{2}$

لدينا  $\frac{4 \times 9}{2} - \frac{x(9-x)}{2} = \frac{x(9-x)}{2}$

ومنه  $18 - 9x + x^2 = 0$ .....

### (b) نتيجة

نعتبر معادلة من شكل  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  و  $a \neq 0$

لدينا  $\Delta = 4(b'^2 - ac)$  نضع  $\Delta' = b'^2 - ac$

إشارة  $\Delta$  هي إشارة  $\Delta'$

إذا كان  $\Delta' < 0$  فإن  $S = \emptyset$

إذا كان  $\Delta' = 0$  فإن  $S = \left\{-\frac{b'}{a}\right\}$

إذا كان  $\Delta' > 0$  فإن  $S = \left\{\frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}\right\}$

العدد  $\Delta'$  يسمى المميز المختصر للمعادلة

### تمرين

$$x \in \mathbb{R} \quad 6x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0 \quad \text{حل}$$

### 4- نعمل ثلاثة الحدود

$$a \neq 0 \quad / \quad T(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{نعتبر ثلاثة الحدود}$$

ليكن  $\Delta$  مميزها

\* إذا كان  $\Delta < 0$  فان  $T(x)$  لا تقبل جدرا و بالتالي  $T(x)$  لا يمكن تعميلها في  $\mathbb{R}$

$$* \text{ إذا كان } \Delta = 0 \text{ فان } T(x) \text{ لها جذر وحيد } \frac{-b}{2a} \text{ وبالتالي } T(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

\* إذا كان  $\Delta > 0$  فان  $T(x)$  لها خدرين مختلفين  $x_1$  و  $x_2$

$$\text{وبالتالي } T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

### تمرين

$$Q(x) = x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

عمل

### 5- معادلات تؤول في حلها الى معادلات من الدرجة الثانية

$$\text{مثال 1 حل } x \in \mathbb{R} \quad x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

$$\text{مثال 2 حل } x \in \mathbb{R} \quad 2x - 7\sqrt{x} - 4 = 0$$

$$\text{مثال 3 نعتبر } P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$$

$$\text{أحسب } P\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{حل المعادلة } P(x) = 0$$

### 6- مجموع و جداء جدرى ثلاثة الحدود

$$\text{نعتبر } x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{حيث } a \neq 0$$

لنفترض أن  $\Delta > 0$  و أن جذريها هما  $x_1$  و  $x_2$

لدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

$$\text{إذن } x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad ; \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

### خاصة

إذا كان للمعادلة  $x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + bx + c = 0$  حيث  $a \neq 0$  حلان  $x_1$  و  $x_2$  فانهما يحققان العلاقتين

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad ; \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

### تمرين

تأكد أن للمعادلة  $4x^2 - 7x + 5 = 0$  جدران  $x_1$  و  $x_2$  ثم أحسب  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  دون حساب  $x_1$  و  $x_2$

### VI- المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

#### 1- اشارة ثلاثة الحدود من الدرجة الثانية

$$a \neq 0 \quad / \quad T(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{نعتبر ثلاثة الحدود}$$

ليكن  $\Delta$  مميزها

$$\text{الشكل القانوني } T(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

إذا كان  $\Delta < 0$  فان اشارة  $ax^2 + bx + c$  هي اشارة  $a$

إذا كان  $\Delta = 0$  فان  $ax^2 + bx + c$  يكون منعدما من أجل  $x = \frac{-b}{2a}$  وإشارتها إشارة  $a$  لكل  $x$  من

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

إذا كان  $\Delta < 0$  فان  $T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  حيث  $x_1$  و  $x_2$  جذري  $ax^2 + bx + c$

نفترض أن  $x_1 < x_2$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$x - x_1$	-	0	+	+	
$x - x_2$	-	-	0	+	
$T(x)$	إشارة $a$	0	عكس إشارة $a$	0	إشارة $a$

### خلاصة

إذا كان  $\Delta < 0$  فان إشارة  $ax^2 + bx + c$  هي إشارة  $a$

إذا كان  $\Delta = 0$  فان إشارة  $ax^2 + bx + c$  هي إشارة  $a$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$

إذا كان  $\Delta < 0$  و  $x_1 < x_2$  جذري  $ax^2 + bx + c$  فان

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$T(x)$	إشارة $a$	0	عكس إشارة $a$	0	إشارة $a$

### 2- المتراجحات

أ- حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحات

$$3x^2 - 2x - 8 < 0$$

$$-2x^2 + 5x - 3 \leq 0$$

$$4x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$-3x^2 + \sqrt{3}x - 1 \geq 0$$

ب- متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات من الدرجة الثانية

#### مثال 1

حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحتين

$$2x^4 - 9x^2 + 4 > 0$$

$$\frac{x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}}{x^2 - x - 2} \geq 0$$

#### مثال 2

نعتبر  $p(x) = 6x^3 - 13x^2 + 4$

1- تأكد أن 2 جذر للحدودية  $p(x)$

2- حل في  $\mathbb{R}$   $p(x) \leq 0$

3- حل في  $\mathbb{R}$   $p(x) \leq 3x^2(x - 2)$

#### تمرين

نعتبر  $p(x) = -x^3 + (3+a)x^2 - (2+3a)x + 2a$

1- بين أن  $a$  جذر للحدودية  $p(x)$

2- حدد حدودية  $Q(x)$  حيث  $p(x) = (x - a)Q(x)$

3- أدرس إشارة  $-x^2 + 3x - 2$

4- ب- حل في  $\mathbb{R}$   $p(x) > 0$  حيث  $Q(a) > 0$