الحساب المثلثي – الجزء1

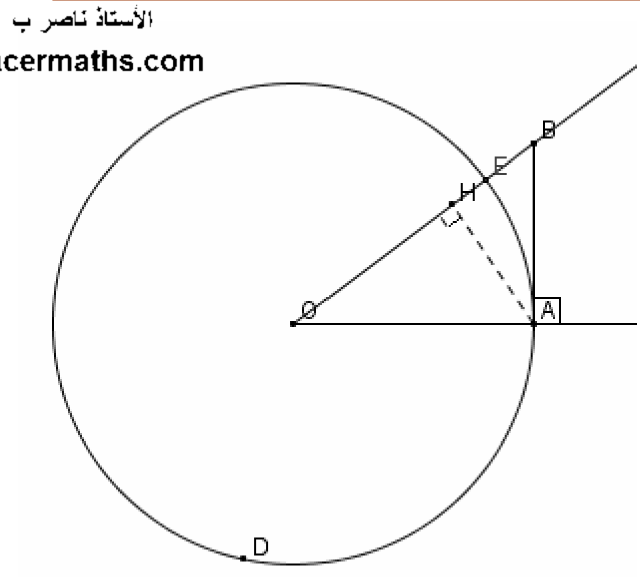
القدرات المنتظرة	
*- استعمال المحسبة العلمية لتحديد قيمة مقربة ازاوية محددة بأحد نسبها المثلثية والعكس. *- التمكن من النسب المثلثية للزوايا الاعتيادية وتطبيق مختلف العلاقات	الدورة الأولى 15 ساعة

I- تذكير و اضافات

1- أنشطة للتذكير

تمرين1

نعتبر الشكل التالي حيث $OA=4$ و $AB=3$ و H المسقط العمودي لـ A على (OB) :



1- أحسب OB

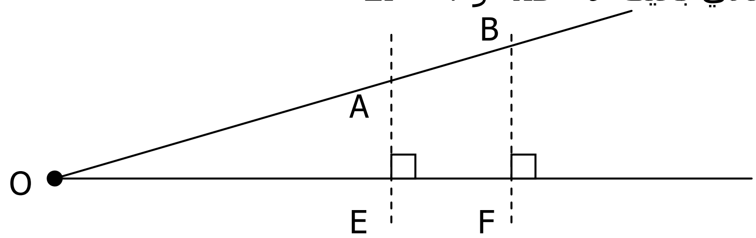
2- أ/ أحسب $\cos\left(\widehat{AOB}\right)$ ثم استنتج قيمة مقربة لقياس الزاوية $\left[\widehat{AOB}\right]$

ب/ استنتج المسافة OH

3- أحسب $\tan\left(\widehat{AOB}\right)$ ثم استنتج $\sin\left(\widehat{AOB}\right)$

تمرين2

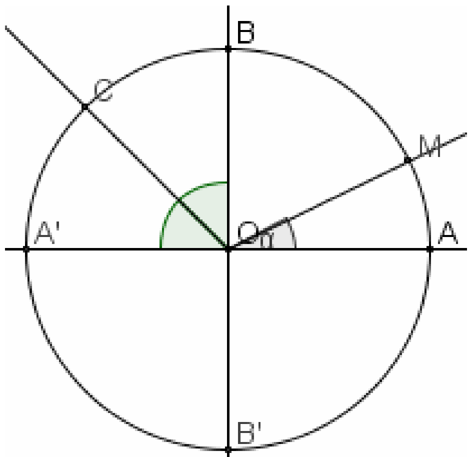
نعتبر الشكل التالي بحيث $AB=5$ و $EF=4$



أحسب $\cos\left(\widehat{AOE}\right)$ ثم استنتج $\sin\left(\widehat{AOE}\right)$

1- وحدات قياس الزوايا و الاقواس الهندسية – زاوية مركزية

1- أنشطة



لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R. نعتبر A و B و C و A' و B' و M نقط من (C) بحيث α قياس للزاوية الهندسية $\left[\widehat{AOM}\right]$ بالدرجة

1- اتمم الجدول التالي

الزاوية المركزية	$\left[\widehat{AOA'}\right]$	$\left[\widehat{AOB}\right]$	$\left[\widehat{AOC}\right]$	$\left[\widehat{AOB'}\right]$	$\left[\widehat{AOM}\right]$
قياس الزاوية المركزية بالدرجة					$\alpha°$
طول القوس الهندسية المرتبطة بها					l

2- بين أن $180°$ و $90°$ و $135°$ و $270°$ متناسبة و πR و $\frac{\pi}{2}R$ و $\frac{3\pi}{4}R$ و $\frac{3\pi}{2}R$ على التوالي

3- حدد l بدلالة α و π و R

4- لتكن M' نقطة من (C) حيث طول القوس الهندسية $[AM']$ هو R.

حدد β قياس الزاوية المركزية $\left[\widehat{AOM'}\right]$ بالدرجة.

2- وحدات قياس الزوايا

لقياس الزوايا هناك ثلاث وحدات هي الدرجة و الغراد و الراديان.

أ/ تعريف الراديان

الراديان هو قياس زاوية مركزية، في دائرة شعاعها R ، تحصر قوسا دائرية طولها R .
نرمز لها بـ rd أو rad

ملاحظة $\pi rd = 200gr = 180^\circ$ (gr : يرمز للغراد)

ب/ نتيجة

إذا كان x قياس زاوية بالراديان و y قياسها بالدرجة و z قياسها بالغراد فان $\dfrac{x}{\pi} = \dfrac{y}{180} = \dfrac{z}{200}$

ج/ قياس قوس هندسية قياس قوس هندسية هو قياس الزاوية المركزية التي تحصره.

د/ طول قوس هندسية

إذا كان α قياس قوس هندسية بالراديان، في دائرة شعاعها R ، فان طول هذه القوس هو αR.

ملاحظة

طول قوس هندسية، في دائرة شعاعها 1 هو قياس الزاوية المركزية التي تحصرها.

تمارين تطبيقية

تمرين1

اتمم الجدول التالي

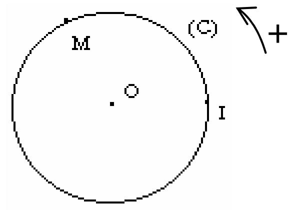
قياس زاوية بالدرجة	$90°$		$45°$	$30°$	$0°$
قياسها بالراديان		$\dfrac{\pi}{3}$			

تمرين2

ليكن ABC مثلثا متساوي الاضلاع حيث $AB = 5cm$ و نعتبر (C) الدائرة التي مركزه A و تمر من B. أحسب l طول القوس الهندسية المحصورة بالزاوية المركزية $\left[\widehat{BAC}\right]$

II- الدائرة المثلثية

1- توجيه دائرة - توجيه مستوى

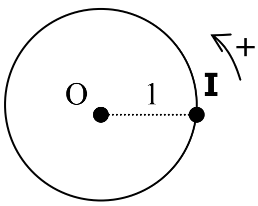


لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R و I نقطة من (C).
لو أردنا أن ننطلق من I لندور حول (C) ، لوجدنا أنفسنا أمام منحيين .
توجيه الدائرة (C) هو اختيار أحد المنحيين منحى موجبا (أو مباشرا)
و الآخر منحى سالبا (أو غير مباشر).
عادة نأخذ المنحى الموجب المعاكس لحركة عقارب الساعة .
النقطة I تسمى أصل الدائرة (C).

عندما توجه جميع دوائر المستوى توجيها موحدا فإننا نقول إن المستوى موجه.

2- الدائرة المثلثية

تعريف الدائرة المثلثية هي دائرة شعاعها1 مزودة بنقطة أصل و موجهة توجيها موجبا.

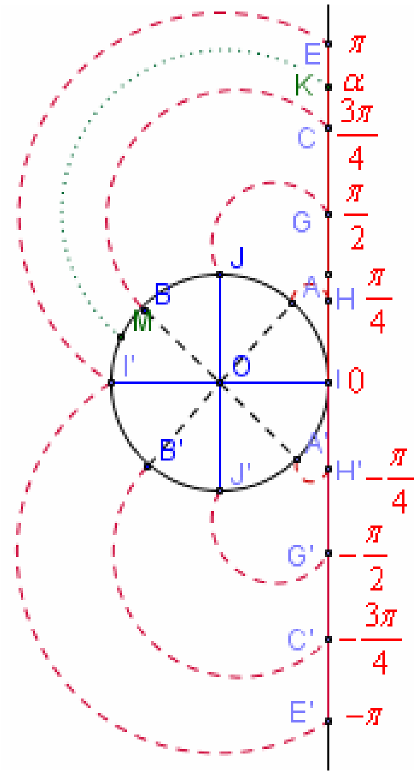


III– الأفاصيل المنحنية.

1- الأفصول المنحني الرئيسي لنقطة على الدائرة المثلثة

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها I. نعتبر المجال $]-\pi;\pi]$ حيث 0 أفصول I في المحور العمودي على (OI). حدد محيط الدائرة وشعاع الدائرة.

إذا لففنا القطعة الممثلة للمجال$]-\pi;\pi]$ على الدائرة (C) نلاحظ أن كل عدد α من $]-\pi;\pi]$ ينطبق مع نقطة وحيدة M من (C) و كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi;\pi]$



العدد α يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ M

خاصية و تعريف

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها I.

كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi;\pi]$ و كل عدد α من $]-\pi;\pi]$ يمثل نقطة وحيدة M من (C).

العدد α يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ M

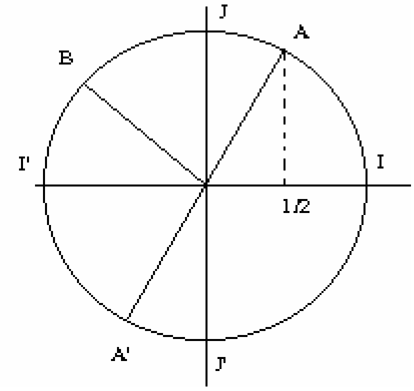
ملاحظة قياس الزاوية الهندسية $[\widehat{IOM}]$ هو $|\alpha|$ راديان

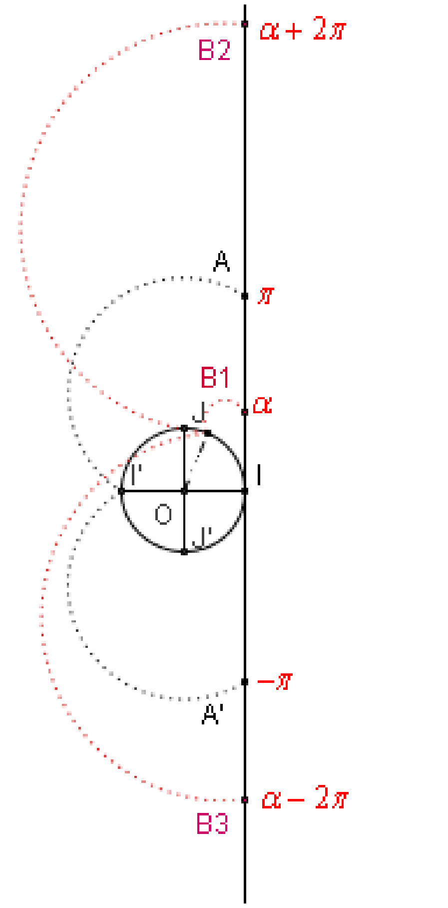
تمرين1

على دائرة مثلثية (C) أصلها I. أنشئ النقط A و B و C و D و E و F و G و H التي افاصيلها المنحنية الرئيسية هي $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{3\pi}{4}$ على التوالي

تمرين2

(C) دائرة مثلثية أصلها I . حدد الأفاصيل المنحنية الرئيسية للنقط B; A';A; J'; J; I';I الممثلة في الشكل كما يلي





2- الأفاصيل المنحنية لنقطة على الدائرة المثلثة

نعتبر (C) دائرة مثلثية أصلها I. نعتبر المحور $(\Delta)=D(I,E)$ حيث $(OI)\perp(\Delta)$.

لتكن نقطة M من (C) أفصولها المنحني الرئيسي α.

لنحدد كل الأعداد التي تنطبق مع M اذا لففنا المستقيم العددي على (C)

نلاحظ اننا اذا لففنا المستقيم العددي الممثل لـ $\mathbb{R}$ على (C) النقطة M تنطبق مع الأعداد

$$.............\ \alpha+4\pi\ ;\ \alpha+2\pi\ ;\ \alpha\ ;\ \alpha-2\pi\ ;\ \alpha-4\pi\ ....$$

كل هذه الأعداد تسمى الأفاصيل المنحنية لنقطة M

نلاحظ أن هذه الأعداد تكتب بشكل عام عل شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تعريف

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I. و ليكن α أفصولها المنحني الرئيسي

كل عدد يكتب على الشكل $\alpha+2k\pi$ بحيث k عنصر من $\mathbb{Z}$ يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M.

تمرين حدد الأفاصيل المنحنية للنقطتين A و B ذات الافصولين المنحنيين الرئيسيين $\frac{\pi}{5}$ و $-\frac{2\pi}{3}$

على التوالي

تمرين (C) دائرة مثلثية أصلها I .

نعتبر $\frac{34\pi}{3}$ أفصول منحنى لنقطة M . أنشئ M

ب- خاصيات

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I. و ليكن α أفصولها المنحنى الرئيسي

بين اذا كانx و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x-y=2\lambda\pi$

خاصية - إذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x-y=2\lambda\pi$

و نكتب $x\equiv y\quad[2\pi]$ و نقرأ x يساوي y بترديد 2π.

- إذا كان x أفصول منحنى للنقطة M فان جميع الأفاصيل المنحنية للنقطة M تكتب على شكل $x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

تمرين حدد الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة التي إحدى أفاصيلها المنحنية $\alpha=\frac{-227\pi}{6}$

تمرين مثل على الدائرة المثلثية النقط $A;B;C$ التي أفاصيلها المنحنية على التوالي هي

$7\pi\quad;\quad\frac{37\pi}{3}\quad;\quad\frac{-108\pi}{12}$

تمرين أنشئ على الدائرة المثلثية النقط M_k التي أفاصيلها المنحنية $-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

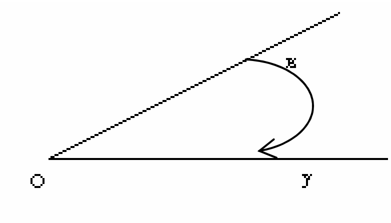
IV– الزوايا الموجهة

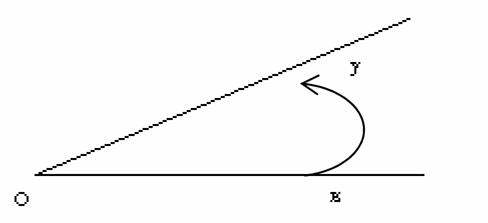
4- الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم

أ- تعريف

في المستوى الموجه نعتبر $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم لهما نفس الأصل

الزوج $([O;x[;[O;y[)$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم و يرمز لها بالرمز $(\widehat{Ox;Oy})$





ب- قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم

تعريف وخاصية

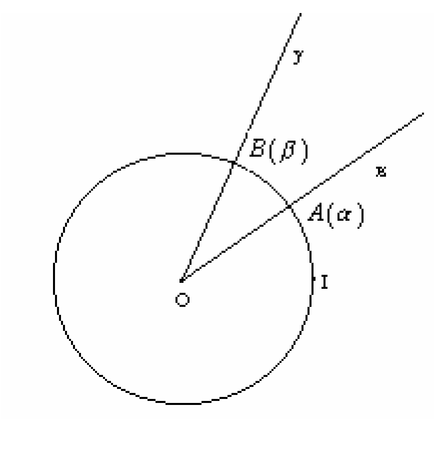
لتكن $(\widehat{Ox;Oy})$ زاوية موجهة لنصفي مستقيم ، و (C) دائرة مثلثية مركزها O ، A و B نقطتي تقاطع (C) و نصفي مستقيم $[O;x[$ و $[O;y[$ على التوالي

ليكن α و β أفصولين منحنيين للنقطتين A و B على التوالي .

العدد $\beta-\alpha$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$.

كل عدد حقيقي يكتب على الشكل $\beta-\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$.



نرمز لقياسات الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$ بالرمز $(\overline{Ox;Oy})$ نكتب $k\in\mathbb{Z}$ $\quad(\overline{Ox;Oy})=\beta-\alpha+2k\pi$

و نكتب أيضا $(\overline{Ox;Oy})\equiv\beta-\alpha\quad[2\pi]$

خاصية و تعريف

لكل زاوية موجهة لنصفي مستقيم قياس وحيد ينتمي إلى المجال $]-\pi;\pi]$ يسمى القياس الرئيسي لهذه الزاوية الموجهة.

خاصية

إذا كان θ قياس للـزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ فان $\theta+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ قياس للزاوية $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$.

إذا كان α و β قياسين للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ فان $\alpha-\beta\equiv 0 \quad 2\pi$

أي $\left(k\in\mathbb{Z}/ \quad \alpha-\beta=2k\pi\right)$

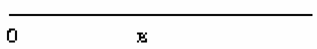
ملاحظات

* إذا كان M نقطة من دائرة مثلثية أصلها I و مركزها O فان الأفاصيل المنحنية للنقطة M هي قياسات الزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{OI};\overline{OM}}\right)$ و أن الافصول المنحني الرئيسي لـ M هو القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{OI};\overline{OM}}\right)$

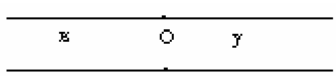
* القيمة المطلقة للقياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ هي قياس الزاوية الهندسية $\left(\widehat{xOy}\right)$.

بعض الزوايا الخاصة

الزاوية المنعدمة $\left(\overline{Ox};\overline{Ox}\right)\equiv 0 \quad [2\pi]$

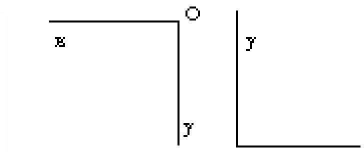


الزاوية المستقيمة $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv\pi \quad [2\pi]$ $\quad \left(\overline{Oy};\overline{Ox}\right)\equiv\pi \quad [2\pi]$



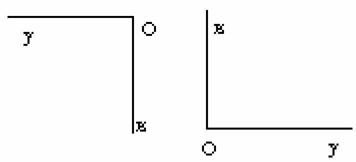
الزاوية القائمة - $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

الزاوية $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ زاوية قائمة موجبة



- $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv-\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

الزاوية $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ زاوية قائمة سالبة.



تمرين

1- بين أن القياسات التالية تمثل قياسات نفس الزاوية $\frac{601\pi}{6}$; $\frac{-143\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$

2- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات 47π ; -36π ; $\frac{52\pi}{5}$; $-\frac{25\pi}{3}$

3- أنشئ زاوية موجهة $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ قياسها $\frac{-234\pi}{5}$.

تمرين أنشئ ABC مثلث متساوي الأضلاع حيث $\left(\overline{AB};\overline{AC}\right)\equiv-\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

ج- علاقة شال ونتائجها

علاقة شال

إذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم لها نفس الأصل فان

$$\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)+\left(\overline{Oy};\overline{Oz}\right)\equiv\left(\overline{Ox};\overline{Oz}\right) \quad [2\pi]$$

نتائج

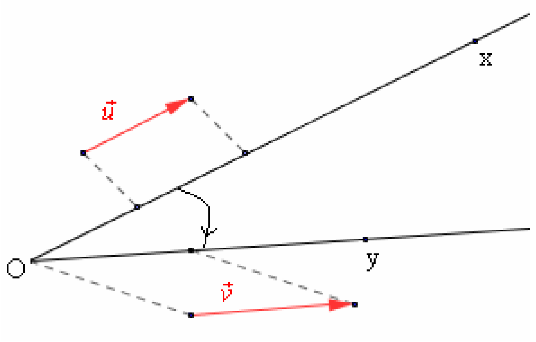
* اذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم فان $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv-\left(\overline{Oy};\overline{Ox}\right) \quad [2\pi]$

* اذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم تحقق $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv\left(\overline{Ox};\overline{Oz}\right) \quad [2\pi]$ فان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم منطبقان.

و هذا يعني أنه اذا كان $[Ox[$ نصف مستقيم و α عددا حقيقيا فانه يوجد نصف مستقيم وحيد $[O;y[$ بحيث $(\widehat{Ox;Oy}) \equiv \alpha \quad [2\pi]$.

د- زاوية زوج متجهتين غير منعدمتين

تعريف



لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى الموجه. و $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم موجهين على التوالي بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

زاوية زوج المتجهتين $(\vec{u};\vec{v})$ هي الزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$

و يرمز لها بالرمز $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

ملاحظة

مجموعة قياسات الزاوية $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ هي مجموعة قياسات الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$.

علاقة شال ونتائجها

علاقة شال

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة متجهات غير منعدمة فان

$$(\overline{\vec{u};\vec{v}}) + (\overline{\vec{v};\vec{w}}) \equiv (\overline{\vec{u};\vec{w}}) \quad [2\pi]$$

نتائج

* اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين فان $[2\pi] \quad (\overline{\vec{u};\vec{v}}) \equiv -(\overline{\vec{u};\vec{v}})$

* اذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة متجهات غير منعدمة تحقق $[2\pi] \quad (\overline{\vec{u};\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u};\vec{w}})$ فان $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى.

تمرين

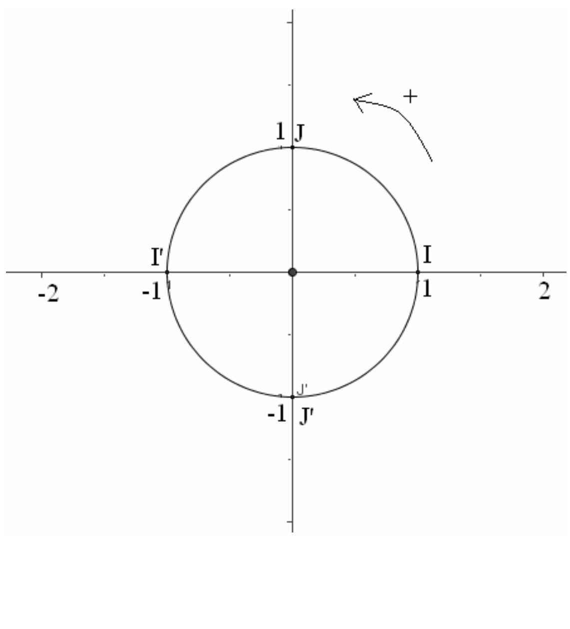
لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I. نعتبر على (C) النقط التالية المعرفة بأفاصيلها المنحنية $A(\pi)$ $\quad B\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ $\quad E\left(\frac{23\pi}{4}\right)$ $\quad F\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$

أعط قياسا لكل من الزاوايا التالية ، ثم حدد القياس الرئيسي لكل منهن

$(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA}})$; $(\overline{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}})$; $(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}})$; $(\overline{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}})$

V - النسب المثلثة

1- المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثة



لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I .

ولتكن J من (C) بحيث $(\widehat{OI;OJ})$ زاوية قائمة موجبة

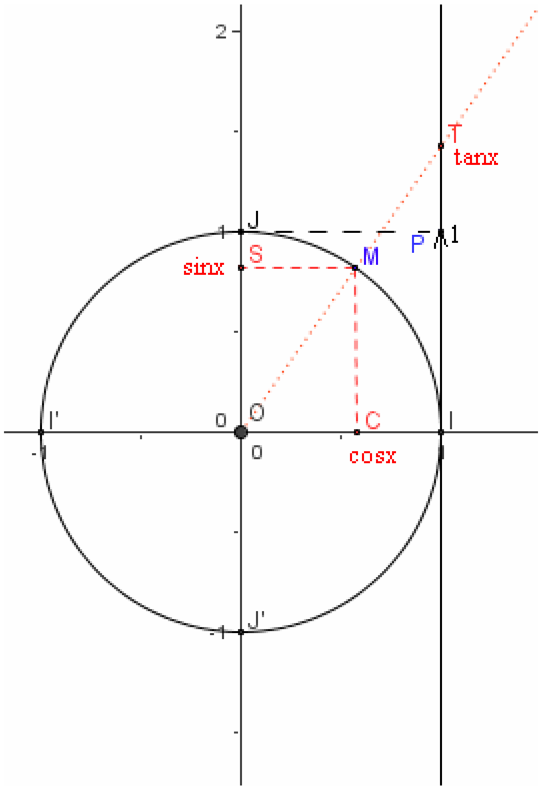
المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم المباشر المرتبط بالدائرة المثلثة (C).

لتكن J' من (C) بحيث $(\widehat{OI;OJ'})$ زاوية قائمة سالبة .

المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ'})$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم الغير المباشر المرتبط بالدائرة المثلثة (C).

2- النسب المثلثة

1-2 تعاريف



لتكن (C) دائرة مثلثة و $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بها. لتكن M نقطة من (C) و x أفصولا منحنيا لها . نعتبر C المسقط العمودي لـ M على (OI) و S المسقط العمودي لـ M على (OJ)

*- العدد الحقيقي أفصول النقطة M في المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى جيب تمام العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\cos x$

*- العدد الحقيقي أرتوب النقطة M في المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى جيب العدد الحقيقي x . نرمز له بـ $\sin x$

*- ليكن Δ المماس لـ (C) عند I و النقطة $P(1;1)$.

لتكن T نقطة تقاطع (OM) و Δ أي

$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

العدد الحقيقي أفصول T في المعلم $(I;P)$ يسمى ظل العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\tan x$.

ملاحظة و اصطلاحات

- إذا كان x أفصول منحنى لنقطة M فان $M(\cos x;\sin x)$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\cos x\end{array}$ تسمى دالة جيب التمام حيز تعريفها $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\cos$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\sin x\end{array}$ تسمى دالة الجيب حيز تعريفها $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\sin$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\tan x\end{array}$ تسمى دالة الظل حيز تعريفها $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ يرمز لها بـ $\tan$

2-2 خاصيات

*- كيفما كان وضع M نقطة من (C) أفصولها منحى x النقطة C تنتمي الى القطعة $[II']$ و S تنتمي الى $[JJ']$ حيث $J(0;1)$; $J'(0;-1)$; $I'(-1;0)$; $I(1;0)$

لكل $x\in\mathbb{R}$ $\quad -1\le\sin x\le1 \quad -1\le\cos x\le1$

*- لكل $x\in\mathbb{R}$ $\quad \cos^2 x+\sin^2 x=1$

*- لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

*- نعلم أن جميع الأعداد الحقيقية التي تكتب $x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، أفاصيل منحنية لنفس النقطة M

لكل $x\in\mathbb{R}$ $\quad \sin(x+2k\pi)=\sin x \quad ; \quad \cos(x+2k\pi)=\cos x$

- مهما كانت $M(x+k\pi)$ لدينا أفصول T هو $\tan x$

لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad \tan(x+k\pi)=\tan x$

حالة خاصة لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad \tan(x+\pi)=\tan x$

*- بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على

- $\sin(-x)=-\sin x \quad ; \quad \cos(-x)=\cos x$ لكل $x\in\mathbb{R}$

نعبرعن هذا بقولنا ان الدالة cos زوجية و أن الدالة sin فردية.

- $\tan(-x)=-\tan x$ لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

نعبر عن هذا بقولنا ان الدالة tan فردية.

- $\cos(\pi-x)=-\cos x \quad ; \quad \sin(\pi-x)=\sin x$ لكل $x\in\mathbb{R}$
- $\cos(\pi+x)=-\cos x \quad ; \quad \sin(\pi+x)=-\sin x$ لكل $x\in\mathbb{R}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ لكل $x\in\mathbb{R}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ لكل $x\in\mathbb{R}$

2-3- نسب مثلثة اعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

تمارين

تمرين1 أحسب $\sin\frac{-7\pi}{2} \; ; \sin\frac{53\pi}{6} \; ; \cos\frac{-37\pi}{4} \; ; \cos\frac{34\pi}{3}$

تمرين2 أ- حدد $1+\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{6}+....+\cos\frac{11\pi}{6}$

ب- بسط $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)+\sin(3\pi+x)-\cos(7\pi-x)$

تمارين

تمارين محلولة

تمرين1

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر $\frac{267\pi}{6}$ و $-\frac{238\pi}{3}$ الأفصولين المنحنيين للنقطتين A و B . لتكن C نقطة حيث $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{-42\pi}{5} \quad [2\pi]$.

1- حدد الأفصولين المنحنيين الرئيسين للنقطتين A و B

2- حدد القياس الرئيسي $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ ثم حدد $\cos(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$

3- حدد القياس الرئيسي $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}})$

4- مثل النقط A و B و C على الدائرة المثلثية

تمرين2

1- أحسب $A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

$$B=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$$

2- علما أن $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ حدد $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$ و $\cos\frac{7\pi}{8}$

تمرين3

1- بسط $C=\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)\cdot\cos(7\pi-x)+\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)\cdot\sin(3\pi+x)$

2- بين أن $\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\sin^2 x=1$

الحل

تمرين1

1- نحدد الأفصولين المنحنيين الرئيسين للنقطتين A و B

لدينا $A\left(\frac{267\pi}{6}\right)$ و $\frac{267\pi}{6}=2\times 22\pi+\frac{\pi}{2}$ حيث $\frac{\pi}{2}\in]-\pi;\pi]$

إذن $\frac{\pi}{2}$ الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة A

لدينا $B\left(-\frac{238\pi}{3}\right)$ و $-\frac{238\pi}{3}=2\times -40\pi+\frac{2\pi}{3}$ حيث $\frac{2\pi}{3}\in]-\pi;\pi]$

إذن $\frac{2\pi}{3}$ الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة B

2- نحدد القياس الرئيسي $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ ثم نحدد $\cos(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$

$$(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$$ و $\frac{\pi}{6}\in]-\pi;\pi]$

إذن $\frac{\pi}{6}$ القياس الرئيسي $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ ومنه $\cos(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3- نحدد القياس الرئيسي $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}})$

لدينا $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}})\equiv\frac{-42\pi}{5} \quad [2\pi]$

حسب علاقة شال لدينا

$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)+2k\pi$$

$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=-\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)+2k\pi$$

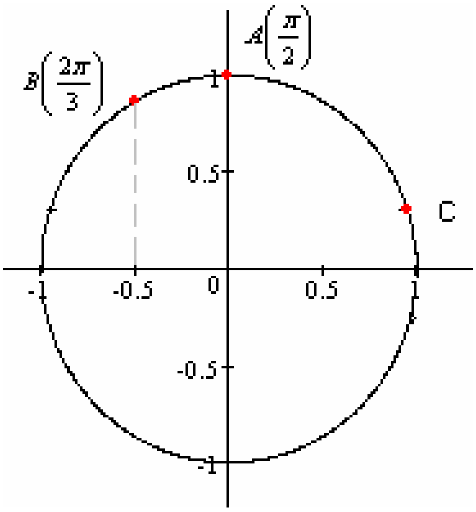
$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{42\pi}{5}+\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{257\pi}{30}+2k\pi$$

$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{17\pi}{30}+8\pi+2k\pi=\frac{17\pi}{30}+2(4+k)\pi$$

وحيث $\frac{17\pi}{30}\in]-\pi;\pi]$ فان $\frac{17\pi}{30}$ هي القياس الرئيسي $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)$

-4 نمثل النقط A و B و C على الدائرة المثلثية



تمرين2

-1 نحسب A و B

لدينا $A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

$\cos\frac{7\pi}{8}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\frac{\pi}{8}$ ومنه $\cos^2\frac{7\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}$

$\cos\frac{5\pi}{8}=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)=-\cos\frac{3\pi}{8}$ ومنه $\cos^2\frac{5\pi}{8}=\cos^2\frac{3\pi}{8}$

و بالتالي $A=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$

لدينا $\cos\frac{3\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}$ ومنه $A=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=2$

لدينا $B=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$

ومنه

$$A+B=\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$$

و بالتالي $A+B=4$ اذن $B=4-A=4-2=2$

2- نحدد $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$ و $\cos\frac{7\pi}{8}$

لدينا $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ نعلم أن $1+\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}$

ومنه $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\frac{1}{4-2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

وحيث أن $\frac{\pi}{8}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ فان $\cos\frac{\pi}{8}\succ 0$ و $\sin\frac{\pi}{8}\succ 0$

و بالتالي $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{8}}=\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\cos\frac{7\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

تمرين3

1- نبسط $C=\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)\cdot\cos\left(7\pi-x\right)+\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)\cdot\sin\left(3\pi+x\right)$

لدينا $\sin\left(3\pi+x\right)=\sin\left(\pi+x\right)=-\sin x$

و $\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)=\cos\left(14\pi-\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

و $\cos\left(7\pi-x\right)=\cos\left(\pi-x\right)=-\cos x$

و $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)=\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$

إذن $C=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

2- نبين أن $\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\sin^2 x=1$

$$\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\cdot\sin^2 x=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x-\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^4 x\right)+3\cos^2 x\cdot\sin^2 x$$

$$=\cos^4 x-\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^4 x+3\cos^2 x\cdot\sin^2 x$$

$$=\cos^4 x+2\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^4 x$$

$$=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2=1$$

تمارين غير محلولة

التمرين1

1- حدد الأفصول المنحني الرئيسي المرتبط بالافصولين المنحنيين التاليين $\frac{789\pi}{7}$; $\frac{-214\pi}{5}$

2- مثل على الدائرة المثلثية النقط ذات الأفاصيل المنحنية $\frac{-\pi}{6}$ و $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{23\pi}{2}$ و $\frac{-59\pi}{4}$

3- بين أن الاعداد التالية تمثل الافاصيل المنحنية لنفس النقطة $\frac{601\pi}{6}$; $\frac{-143\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$

2- مثل على الدائرة المثلثية النقط M_k التي أفاصيلها المنحنية هي $\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{4}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

4- ليكن x الأفصول المنحني الرئيسي لنقطة M

حدد الأفاصيل المنحنية لنقطة M التي تنتمي الى المجال I في الحالتين التاليتين

a) $x=\frac{\pi}{4}$ $I=\left[\frac{34\pi}{3};\frac{43\pi}{3}\right]$ b) $x=\frac{-2\pi}{5}$ $I=\left[\frac{-33\pi}{5};\frac{-13\pi}{5}\right]$

5- ضع على دائرة مثلثية النقط M التي أفصولها المنحني x حيث $3x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

6- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات

$$-\frac{25\pi}{3} \quad ; \quad \frac{52\pi}{5} \quad ; \quad -36\pi \quad ; \quad 47\pi$$

التمرين2

- أنشئ مثلثا ABC متساوي الساقين في الرأس A حيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv -\frac{2\pi}{5} \quad [2\pi]$

- حدد بالرديان قياس كل من الزوايا $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$ و $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)$ و $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AC}\right)$

التمرين3

على الدائرة المثلثية نعتبر $A\left(\frac{-\pi}{3}\right)$. أعط القياس الرئيسي للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}})$ في كل من الحالتين

a) $\frac{27\pi}{2}$ أفصول منحني لنقطة M $\qquad$ b) $(\widehat{\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{23\pi}{8} \quad [2\pi]$

التمرين4

1- حدد النسب المثلثية للأعداد $\cos\frac{7\pi}{6} \quad ; \quad \tan-\frac{73\pi}{3} \quad ; \quad \sin\frac{15\pi}{4} \quad ; \quad \sin\frac{-23\pi}{3}$

2- إذا علمت أن $\sin\frac{7\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ فأحسب $\cos\frac{7\pi}{8} \quad ; \quad \tan\frac{7\pi}{8} \quad ; \quad \sin\frac{\pi}{8} \quad ; \quad \sin\frac{3\pi}{8}$

$$\cos\frac{327\pi}{8} \quad ; \quad \tan\frac{-78\pi}{8} \quad ; \quad \sin\frac{-25\pi}{8}$$

التمرين5

ليكن $x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$. نضع $A = \frac{\tan x - 1}{\tan^2 x + 1}$

1- بين أن $A = \cos x \sin x - \cos^2 x$

2- إذا علمت أن $\sin x = \frac{4}{5}$ فأحسب A

3- إذا علمت أن $A = 0$ فاحسب x

التمرين6

1- إذا علمت أن $\sin\frac{7\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ أحسب $\cos\frac{7\pi}{8} \quad ; \quad \tan\frac{7\pi}{8} \quad ; \quad \sin\frac{\pi}{8} \quad ; \quad \sin\frac{3\pi}{8}$

2- بسط $A = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \cdot \sin^2 x$ $\qquad B = \left(1+\sin x + \cos x\right)^2 - 2\left(1+\sin x\right)\left(1+\cos x\right)$

$C = 2\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - 3\left(\cos^4 x + \sin^4 x\right)$ $\qquad D = \cos^6 x + \sin^6 x + \cos^4 x + \sin^4 x + 5\cos^2 x \sin^2 x$

التمرين7

1- أحسب $\tan\frac{\pi}{5} + \tan\frac{2\pi}{5} + \tan\frac{3\pi}{5} + \tan\frac{4\pi}{5}$

2- ليكن $x \in \mathbb{R}$

بسط $\sin\left(\pi - x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\cos\left(\pi - x\right)$

$$\sin(x - 7\pi) + \sin(x + 9\pi)$$

$$\cos(x - \frac{27\pi}{2}) - \sin(x + 27\pi)$$

التمرين8

ليكن $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$. نعتبر $A = \cos^4 x + \sin^4 x - (\sin x \cos x)(\cos x - \sin x)^2$

1- بين أن $A = 1 - \sin x \cdot \cos x$

2- علما أن $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ أحسب A من أجل $x=\frac{11\pi}{12}$

التمرين9

نضع $P(x)=\cos^6 x+\sin^6 x-\frac{1}{4}$ حيث $x\in[0;\pi]$

1- بين أن $P(x)=\frac{3}{4}\left(2\cos^2 x-1\right)^2$

2- أكتب $P(x)$ بدلالة $\tan x$

3- علما أن $\tan x=-\sqrt{2}$ أحسب $P(x)$ و $\cos x$.

التمرين10

حدد

$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$$

$$B=1+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+.....+\sin\frac{13\pi}{7}$$

التمرين11

مثل على دائرة المثلثية النقط M التي أفاصيلها المنحنية α حيث $\cos\alpha=\frac{-3}{4}$ ، ثم لون بالأحمر جزء الدائرة المثلثية الذي يحتوي على النقط التي أفاصيلها المنحنية β حيث $\cos\beta\leq-\frac{3}{4}$

التمرين12

لون بالأحمر مجموعة النقط M التي أفاصيلها المنحنية θ حيث $\tan\theta\geq 2$

التمرين13

على الدائرة المثلثية انشئ النقطتين M_1 و M_2 الذي أرتوبيهما $\frac{1}{2}$

1- حدد مجموعة النقط M التي أفاصيلها المنحنية x حيث $\sin x\succ\frac{1}{2}$

2- حدد مجموعة الأعداد x من $]-\pi;\pi]$ حيث $\sin x\succ\frac{1}{2}$

3- حدد مجموعة الأعداد x من $[0;2\pi[$ حيث $\sin x\succ\frac{1}{2}$

4- حدد مجموعة الأعداد x من $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$ حيث $\sin x\succ\frac{1}{2}$