

(e) إذا كانت التجهتان \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين ولهما منحنيان متعاكسان فإن :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

(f) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ تكافئ $\vec{u} \perp \vec{v}$

(g) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (*)

(*) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(*) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$

(*) $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$

(*) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

(*) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

(*) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

(III) تطبيقات الجداء السلمي

(1) علاقة الكاشي .

ليكن (ABC) مثلثا لدينا :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}$$

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos \hat{B}$$

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos \hat{C}$$

(2) مبرهنة المتوسط

ليكن (ABC) مثلثا و I منتصف القطعة $[AB]$

$$\text{لدينا : } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\text{أو } AI^2 = \frac{1}{2} \left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} \right)$$

(3) العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية .

(a) ليكن (ABC) مثلثا قائم الزاوية في A و A' منتصف $[BC]$ و H

المسقط العمودي لـ A على (BC) . لدينا :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad (*) \quad (\text{علاقة فيثاغورس})$$

$$BA^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC} = BH \cdot BC \quad (*)$$

$$CA^2 = \overline{CH} \cdot \overline{CB} = CH \cdot CB \quad (*)$$

$$AH^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{HC} = HB \cdot HC \quad (*)$$

$$AA' = \frac{1}{2} BC \quad (*)$$

(b) ليكن (ABC) مثلثا قائم الزاوية في A . لدينا :

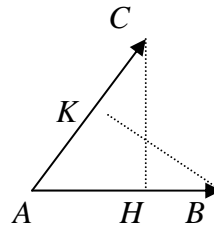
$$\cos \hat{B} = \frac{AC}{BC} \quad \cos \hat{B} = \frac{BA}{BC}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

(c) ليكن (ABC) مثلثا . لدينا :

$$\frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{B}}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{AB}$$

(I) تعريف



(1) ليكن \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} متجهتين غير منعدمتين .

ليكن H المسقط العمودي لـ C على (AB)

و K المسقط العمودي لـ B على (AC)

نسمي الجداء السلمي للمتجهتين \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB}

العدد الحقيقي الذي نرمز له بـ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ والمعرف بما يلي :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

$$= \overline{AC} \cdot \overline{AK}$$

$$= AB \cdot AC \cdot \cos(\hat{BAC})$$

(2) إذا كانت إحدى المتجهتين \overrightarrow{AB} أو \overrightarrow{AC} فإن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

(II) خاصيات

(1) ليكن \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} متجهتين غير منعدمتين .

ليكن C' المسقط العمودي لـ C على (AB)

ليكن D' المسقط العمودي لـ D على (AB)

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{C'D'}$$

ملاحظة :

من اجل حساب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ نسقط إحدى المتجهتين على الأخرى ونمر من التجهتين إلى القياس الجبري ، مع الاحتفاظ بالنقط التي أسقطنا عليها ، ونعرض النقط التي أسقطناها بمساقطها .

(2a) نرمز لـ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ بالرمز \overline{AB}^2 ويسمى المربع السلمي .

$$\text{(b) لدينا } \overline{AB}^2 = AB^2$$

(3a) إذا كانت التجهتان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} مستقيمتين ولهما نفس المنحى فإن :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

(b) إذا كانت التجهتان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} مستقيمتين ولهما منحنيان متعاكسان فإن :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

(4a) نقول إن التجهتين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} متعامدتان إذا فقط إذا كان كـ المستقيمان

(AB) و (CD) متعامدين . ونكتب $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

(b) لدينا $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ تكافئ $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$

(5) إذا كانت النقط A و B و C و D مستقيمية فإن

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

(6a) ليكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين وليكن A و B و C 3 نقط بحيث

$$\overrightarrow{AC} = \vec{v} \quad \overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

$$\text{لدينا : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

(b) ليكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين :

$$\text{لدينا } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\hat{u}, \vec{v})$$

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 \quad (\text{c})$$

(d) إذا كانت \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين ولهما نفس المنحى فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

