الدوال العددية

I) مجموعة التعريف

1) تعريف مجموعة تعريف الدالة f هي مجموعة الأعداد التي لها صورة ونرمز لها بـــ D_f

2) مجموعة تعريف الدالة : $f(x)=\dfrac{p(x)}{Q(x)}$

تكون $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $Q(x)\neq 0$. نقوم بحل المعادلة $Q(x)=0$ ولدينا $D_f=\mathbb{R}-\{$ حلول المعادلة $\}$

3) مجموعة تعريف الدالة: $f(x)=\sqrt{P(x)}$

تكون $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $P(x)\geq 0$ نقوم بدراسة إشارة $P(x)$ ولدينا $D_f=$ (اتحاد المجالات التي يكون فيها $P(x)\geq 0$)

II) دالة زوجية دالة فردية .

1) من أجل دراسة زوجية دالة f نقوم بتحديد D_f ونتحقق أن لكل x من D_f لدينا $-x\in D_f$ ثم نقوم بحساب $f(-x)$.

*) إذا وجدنا $f(-x)=f(x)$ فإن f زوجية .

*) إذا وجدنا $f(-x)=-f(x)$ فإن f فردية .

ملاحظة a) يمكن لدالة أن لاتكون لا زوجية ولا فردية .

b) $(-x)^n=\begin{cases} x^n & n \text{ زوجـــــي} \\ -x^n & n \text{ فـــــردي} \end{cases}$ $\qquad |-x|=|x|$

2) تكون f **زوجية** إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

3) تكون f **فردية** إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثل بالنسبة لأصل المعلم .

III) تغيرات دالة أو رتابة دالة .

1) من أجل دراسة رتابة دالة f على مجال I نعتبر x و y من I بحيث $x<y$ ونقارن $f(x)$ و $f(y)$.

*) إذا وجدنا $f(x)\leq f(y)$ فإن f تزايدية على I .

*) إذا وجدنا $f(x)<f(y)$ فإن f تزايدية قطعا على I .

*) إذا وجدنا $f(x)\geq f(y)$ فإن f تناقصية على I .

*) إذا وجدنا $f(x)>f(y)$ فإن f تناقصية قطعا على I .

*) إذا وجدنا $f(x)=f(y)$ فإن f ثابتة على I .

2) من أجل دراسة رتابة دالة f على مجال I نعتبر x و y من I بحيث $x\neq y$ *ونقوم بحساب معدل التغير* $T(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ *وندرس إشارته .*

*) إذا وجدنا $T(x,y)\geq 0$ فإن f تزايدية على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)>0$ فإن f تزايدية قطعا على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)\leq 0$ فإن f تناقصية على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)<0$ فإن f تناقصية قطعا على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)=0$ فإن f ثابتة على I .

3) نقول إن f **رتيبة** على المجال I إذا كانت تزايدية أو تناقصية على I .

ملاحظة

a) f تزايدية على I يعني C_f تصاعدي في I عندما نتحرك من اليسار نحو اليمين

b) f تناقصية على I يعني C_f تنازلي في المجال I عندما نتحرك من اليسار نحو اليمين

c) f ثابتة على I يعني C_f عبارة عن مستقيم موازي لمحور الأفاصيل في المجال I .

مثال لدينا f تزايدية على كل من $[1,3]$ و $[5,9]$ وتناقصية على $[3,5]$ ونلخص هذا في جدول يسمى جدول التغيرات .

4) رتابة الدالة $f(x)=ax+b$

a) إذا كان $a>0$ فإن f تزايدية على $\mathbb{R}$

b) إذا كان $a>0$ فإن f تزايدية على $\mathbb{R}$

c) إذا كان $a=0$ فإن f ثابتة على $\mathbb{R}$

d) منحنى الدالة f يكون مستقيما .

5)رتابة دالة زوجية ودالة فردية

a) لتكن f دالة زوجية .

*) إذا كانت f تزايدية على I فإن f تناقصية على $-I$.

*) إذا كانت f تناقصية على I فإن f تزايدية على $-I$.

b) لتكن f دالة فردية .

*) إذا كانت f تزايدية على I فإن f تزايدية على $-I$.

*) إذا كانت f تناقصية على I فإن f تناقصية على $-I$.

c) إذا كان $I=[a,b]$ فإن $-I=[-b,-a]$.

IV) مطارف دالة .

1) إذا أردنا أن نبين أن الدالة f تقبل قيمة قصوية في x_0 ، نبين أن $f(x)\leq f(x_0)$ في مجال I يحتوي على x_0 وتكون هذه القيمة القصوية هي $f(x_0)$.

2) إذا أردنا أن نبين أن الدالة f تقبل قيمة دنوية في x_0 ، نبين أن $f(x) \geq f(x_0)$ في مجال I يحتوي على x_0 وتكون هذه القيمة الدنوية هي $f(x_0)$.

3) a) لكي نبين أن α قيمة قصوية للدالة f ، نبين أن $f(x) \leq \alpha$ في مجال I ونبحث عن x_0 من I بحيث $f(x_0)=\alpha$.

b) لكي نبين أن α قيمة دنوية للدالة f ، نبين أن $f(x) \geq \alpha$ في مجال I ونبحث عن x_0 من I بحيث $f(x_0)=\alpha$.

4) إذا كان جدول تغيرات f على شكل

فإن α قيمة قصوية للدالة f في x_0

و β قيمة دنوية للدالة f في x_1 .

5) إذا كان منحنى الدالة f على شكل

فإن α قيمة قصوية للدالة f في x_0

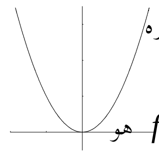
و β قيمة دنوية للدالة f في x_1 .

V) الدوال المرجعية .

1) دراسة الدالة $f(x)=ax^2$ $(a\neq 0)$

a) إذا كان $a>0$ فإن جدول تغيرات f هو

x		0	
f	↘	0	↗



ويكون C_f شلجما رأسه أصل المعلم ومحوره محور الأراتيب تقعره موجه نحو الأعلى .

b) إذا كان $a<0$ فإن جدول تغيرات f هو

ويكون C_f شلجما رأسه أصل المعلم ومحوره محور الأراتيب تقعره موجه نحو الأسفل .

2) دراسة الدالة $f(x)=\frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$ $D_f=\mathbb{R}^*$

a) إذا كان $a>0$ فإن جدول تغيرات f هو

ويكون C_f هذلولا مركزه أصل المعلم مقارباه محوري المعلم .

b) إذا كان $a<0$ فإن جدول تغيرات f هو

ويكون C_f هذلولا مركزه أصل المعلم مقارباه محوري المعلم .

3) دراسة الدالة $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

من أجل إنشاء C_f نحدد معادلة مختصرة ل C_f .ولهذا نكتب $f(x)$ على شكل $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ ثم ننطلقمن $y=f(x)$ يعني $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ يعني $y-\beta=a(x-\alpha)^2$ ثم نضع $\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$

إذن المعادلة تصبح $Y=aX^2$ في العلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ مع $\Omega(\alpha,\beta)$

4) دراسة الدالة $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

من أجل إنشاء C_f نحدد معادلة مختصرة لـــ C_f .ولهذا نكتب $f(x)$ على شكل $f(x)=\beta+\frac{\gamma}{x-\alpha}$ ثم ننطلق من $y=f(x)$ يعني $y-\beta=\frac{\gamma}{x-\alpha}$ ثم نضع $\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$ إذن المعادلة تصبح $Y=\frac{\gamma}{X}$ في العلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ مع $\Omega(\alpha,\beta)$.

5) تقاطع منحنى مع محور ي المعلم .

a) تقاطع C_f مع محور الأراتيب هي النقطة $A(0,f(0))$.

b) *) لكي نحدد تقاطع المنحنى C_f مع محور الأفاصيل نقوم بحل المعادلة $f(x)=0$ وإذا كانت هذه الحلول هي x_1 ، x_2... فإن نقط التقاطع هي $A(x_1,0)$ ، $B(x_2,0)$ ... .

*) حلول المعادلة $f(x)=0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل .

6) تقاطع منحنيين .

*) لكي نحدد تقاطع المنحنى C_f و C_g نقوم بحل المعادلة $f(x)=g(x)$ وإذا كانت هذه الحلول هي x_1 ، x_2... فإن نقط التقاطع هي $A(x_1,f(x_1))$ ، $B(x_2,f(x_2))$ ... .

*) حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع C_g

7) دراسة الوضع النسبي لمنحنيين .

a) لكي ندرس الوضع النسبي للمنحنيين C_f و C_g نقوم بدراسة إشارة $f(x)-g(x)$

*) إذا كان $f(x)-g(x)\geq 0$ فإن C_f يوجد فوق C_g .

*) إذا كان $f(x)-g(x)\leq 0$ فإن C_f يوجد تحت C_g .

b) حلول المتراجحة $f(x)\leq g(x)$ هي اتحاد المجالات التي يكون فيها C_f تحت C_g

8) حل المعادلة $(E): f(x)=m$

حلول المعادلة (E) هي أفاصيل نقط تقاطع C_f والمستقيم $(\Delta): y=m$

9) إنشاء منحنى الدالة $g(x)=|f(x)|$ انطلاقا من C_f .

إذا كان $f(x)\geq 0$ يعني C_f فوق محور الأفاصيل فإن $g(x)=f(x)$ إذن C_g منطبق مع C_f .

وإذا كان $f(x)\leq 0$ يعني C_f تحت محور الأفاصيل فإن $g(x)=-f(x)$ إذن C_g مماثل C_f بالنسبة لمحور الأفاصيل.

وبالتالي C_g مكون من جزء C_f الموجود فوق محور الأفاصيل ومماثل جزء C_f الموجود تحت محور الأفاصيل بالنسبة لمحور الأفاصيل .

10) إنشاء منحنى الدالة $g(x)=f(|x|)$ انطلاقا من C_f .

لدينا $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$ إذن g دالة زوجية وبالتالي منحناها متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب . ولدينا لكل $x\in[0,+\infty[$: $|x|=x$

إذن $g(x)=f(x)$ ومنه C_g منطبق مع C_f .

وبالتالي C_g مكون من جزء C_f الموجود في $[0,+\infty[$ ومماثله بالنسبة لمحور الأراتيب .