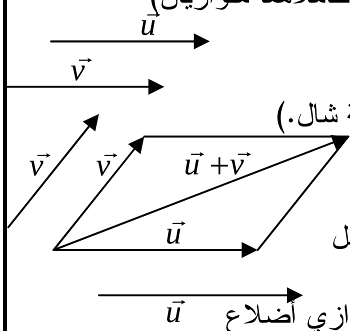
الحساب المتجهي- المرجح
ملخص الدرس

A) الحساب المتجهي

(1) تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متساويتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الاتجاه (يعني حاملاهما متوازيان) ونفس المنحنى ونفس المنظم.



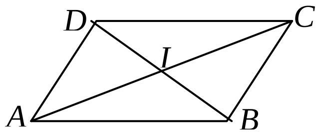
(2) $\boxed{\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}}$

(3) $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$ (علاقة شال).

(4) $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ تكافئ $A=B$.

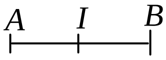
(5) من أجل تحديد $\vec{u}+\vec{v}$ نزيح $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل ونكون متوازي أضلاع.

(6) يكون الرباعي $(ABCD)$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا تحققت إحدى الشروط التالية:



a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
b) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
c) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
d) القطران $[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف.

(7) I منتصف القطعة $[AB]$ يعني



(* $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ (* $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$ (* $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

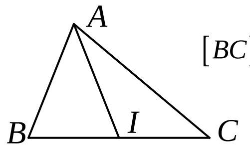
(* $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (* $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

ملاحظة:

a) إذا كان I منتصف $[AB]$ يستحسن استعمال $\boxed{\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$

b) لكي نبين أن I منتصف $[AB]$ يستحسن أن نبين أن $\boxed{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}}$

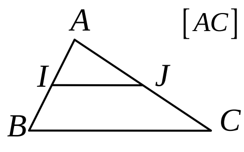
(8) ليكن (ABC) مثلثا و I منتصف $[BC]$



لدينا $\boxed{\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)}$.

(9) ليكن (ABC) مثلثا.

I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$



لدينا $\boxed{\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

(10) a) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملاهما متوازيين.

b) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان $\vec{v}=\alpha\vec{u}$ أو $\vec{u}=\alpha\vec{v}$.

c) تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميين يعني $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}$ أو $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$

d) يكون (AB) و (CD) متوازيين إذا وفقط إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين.

ملاحظة:

a) لكي نبين أن متجهتين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ تحققان علاقة ما (مثلا $\overrightarrow{IJ}=\alpha\overrightarrow{IK}$ أو $\alpha\overrightarrow{IJ}+\beta\overrightarrow{IK}=\vec{0}$ أو ...).
نقوم بحساب $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ بدلالة متجهتين غير مستقيميتين مكونتين من النقط الأصلية $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مثلا.
ونجد مثلا $\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{IK}=6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ ومنه نستخلص أن $3\overrightarrow{IJ}=6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IK}$ إذن $\overrightarrow{IK}=3\overrightarrow{IJ}$.

b) ليكن (ABC) مثلثا و M نقطة بحيث $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$ يستحسن تغيير تعريف النقط M وجعلها من جهة واحدة كما يلي:
$\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$ يعني $\overrightarrow{MA}=3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)$ يعني $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{AB}$
يعني $-2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{AB}$ يعني $2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$ إذن $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

B) المرجح

نسمي نقطة متزنة كل زوج (A,α) حيث A نقطة من المستوى و α عدد حقيقي.

I) مرجح نقطتين.

(1) **تعريف** لتكن (A,α) و (B,β) نقطتين متزنتين.
إذا كان $\alpha+\beta\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق
$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$
النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) أو مرجح النظمة المتزنة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$

(2) **خاصية مميزة:**
تكون النقطة G مرجح النظمة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ إذا وفقط إذا كان $\boxed{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)}$ لكل θ من المستوى P.

ملاحظة:

a) إذا أردنا أن نبين أن G مرجح النظمة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ يستحسن استعمال التعريف ونبين أن $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. ولهذا نتبع ما يلي:
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}$ ثم نحسب $\overrightarrow{GA}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ونعوض.

b) إذا كان G مرجح النظمة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ وأردنا حساب $\overrightarrow{AG}$ أو $\overrightarrow{BG}$ أو $\overrightarrow{CG}$ أو ... يستحسن استعمال الخاصية المميزة.
$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)$ لكل O من P ثم نعوض O ب A أو B أو C...

(3) إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G مرجح $\{(A,k\alpha),(B,k\beta)\}$ لكل k من $\mathbb{R}^*$. وهذا يعني أن المرجح لا يتغير إذا ضربنا الأوزان أو قسمناها على عدد غير منعدم.

4) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\alpha)\}$ مع $(\alpha\neq 0)$ G يسمى مركز ثقل A وB.

لدينا من خلال ما سبق G مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$ إذن $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ لكل θ من P ومن أجل $O=A$

نجد $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ إذن G منتصف $[AB]$

خاصية: مرجح النظمة $\{(A,1)(B,1)\}$ هو مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$ وهو منتصف $[AB]$.

ملاحظة: إذا أردنا أن نبين أن I منتصف $[AB]$ نبين أن I مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$ يعني $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

5) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ لدينا

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)$ لكل O من P. ومن أجل $O=A$

نجد $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ إذن $G\in(AB)$

خاصية: إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن $G\in(AB)$ ولدينا

$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}\ .$$

ملاحظة: إذا أردنا إنشاء المرجح G نقوم بحساب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{BG}$ بدلالة $\overrightarrow{BA}$.

6) **إحداثيات المرجح:**

ليكن G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ إحداثيات G هي

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha x_A+\beta x_B\right)\\ y_G=\dfrac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha y_A+\beta y_B\right)\end{cases}$$

II) مرجح ثلاث نقط.

1) **تعريف:** لتكن (A,α) (B,β) (C,γ) ثلاث نقط متزنة.

إذا كان $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق:

$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$ النقطة G تسمى مرجح النقط (A,α) و (B,β) و (C,γ) أو مرجح النظمة المتزنة $\{(A,\alpha)\ (B,\beta)\ (C,\gamma)\}$.

2) **خاصية مميزة:**

تكون النقطة G مرجح النظمة $\{(A,\alpha)\ (B,\beta)\ (C,\gamma)\}$ إذا وفقط إذا كان: $\boxed{\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}\right)}$ لكل O من المستوى P

ملاحظة: نفس ملاحظة I).

3) المرجح لا يتغير إذا ضربنا أو قسمنا الأوزان على نفس عدد غير منعدم.

4) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\alpha)(C,\alpha)\}$ مع $(\alpha\neq 0)$.

لدينا G مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$. المرجح G يسمى في هذه الحالة مركز ثقل النقط A,B,C أو مركز ثقل المثلث (ABC).

خاصة: مرجح $\{(A,\alpha)(B,\alpha)(C,\alpha)\}$ هو مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$ وهو مركز ثقل (ABC).

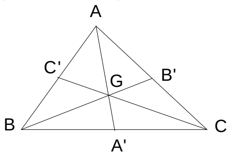
5) **إحداثيات المرجح.**

ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\}$ إحداثيات G هي

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C\right)\\ y_G=\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C\right)\end{cases}.$$

6) **التجميعية.**

إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ و G_1 مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G مرجح $\{(G_1,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$ وهذا يعني أن مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع وزني تلك النقطتين.



7) ليكن (ABC) مثلثا مركز ثقله G

G هو مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$

A' وB' وC' منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي المتوسطات (AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في G.

ولدينا $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

III) مرجح أربع نقط.

نعرف بنفس الطريقة مرجح أربع نقط وسيكون لدينا نفس الخاصيات السابقة. هناك فرق فقط في التجميعية حيث تصبح:

7) مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع الوزنين أو عوضنا كل نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع الوزنين، أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها متزن بمجموع الأوزان.